Trigueros Gaisman, María

El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas

Innovación Educativa, vol. 9, núm. 46, enero-marzo, 2009, pp. 75-87
Instituto Politécnico Nacional
México

Innovación Educativa
ISSN (Versión impresa): 1665-2673
innova@ipn.mx
Instituto Politécnico Nacional
México

El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas*

María Trigueros Gaisman*

Resumen
Mucho se ha hablado en los últimos años de la enseñanza de las matemáticas a través de la modelación, pero ¿qué significa exactamente esto? En este artículo se presenta algunas posturas acerca del uso de la modelación en el aula, así como los resultados de ciertas experiencias específicas de su aplicación en la enseñanza universitaria, por lo que se da cuenta de las posibilidades y limitaciones de esta metodología de enseñanza.

Palabras clave
Modelación matemática, enseñanza, universidad, algebra lineal, ecuaciones diferenciales.

Teaching mathematics using models and modeling

Abstract
Much attention has been devoted in the last few years to the introduction of modelling to mathematics teaching, but, what exactly is understood by modeling? In this paper we present some diffe-rent positions about the use of mathematical modeling in the classroom; we also present the results of some specific experiences where modeling was used to teach mathematics at the university level. We profit from the description of those experiences to discuss the possibilities and limitation of the use of modeling in the mathematics classroom.

Keywords
Mathematics modeling, teaching, university, lineal algebra, differential equations.

* La realización de este trabajo fue posible gracias al apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura, A.C. El trabajo de investigación fue realizado gracias al apoyo de los profesores del ITAM Gustavo Preciado, Edgar Possani, Ma. Dolores Lozano, Carmen López y Javier Alfaro.

** Licenciada, maestra y doctora en física por la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM); tesis doctoral en física en la Universidad de California Berkeley; doctorado en educación por la Universidad Complutense de Madrid; posdoctorado en investigación en enseñanza de las ciencias y las matemáticas en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Miembro del Comité Editorial de la Dirección General de Divulgación de la Ciencia, UNAM, de la Revista Educación Matemática, Santillana, y de la Revista Mexicana de Investigación Educativa. Ha sido distinguida con el reconocimiento especial por trayectoria académica, recibido en la celebración del sexagésimo aniversario del ITAM; Premio Luis Elizondo 2006, categoría científico y tecnológico, área educación, y como miembro del Consejo Consultivo de Matemáticas de la Secretaría de Educación Pública (SEP), México. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) y de la Academia Mexicana de Ciencias (AMC). Es autora y coautra de varios libros, artículos especializados y de investigación. Actualmente integra los departamentos de Matemáticas y Matemáticas Educativa del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), y del Cinvestav, respectivamente, México. E-mail: trigue@itam.mx

Introducción

Mucho se ha hablado recientemente en los círculos relacionados con la enseñanza de las matemáticas acerca de la importancia de que los conceptos se introduzcan de manera contextualizada. Se argumenta que éstos se aprenden más significativamente de esa manera, además de que muchos alumnos muestran mayor interés por la solución de problemas relacionados con su entorno que con las actividades centradas únicamente en las matemáticas.

Hace tiempo que los programas de enseñanza de las matemáticas, en particular aquellos ligados con la enseñanza básica, han hecho énfasis en la importancia de la solución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, esta preocupación ha tardado más en llegar a los ámbitos universitarios, pues es en éstos en donde la enseñanza de las matemáticas es más tradicional: las clases se imparten casi siempre en forma de conferencia, introduciendo definiciones y teoremas de manera más o menos lineal y dejando el trabajo de los alumnos únicamente para la solución de problemas como tarea en casa. Ello sin importar que dicha enseñanza se dirija a alumnos cuyo interés primordial es justamente la aplicación de las matemáticas y no la matemática en sí misma.

Una forma de lograr la contextualización del conocimiento es la presentación de situaciones problemáticas reales que sean factibles de representarse mediante modelos matemáticos. Los modelos matemáticos aparecen cuando se tiene la necesidad de responder preguntas específicas en situaciones reales, cuando se requiere tomar decisiones o cuando es imperativo hacer predicciones relacionadas con fenómenos naturales y sociales. El supuesto que subyace a la introducción de la modelación matemática al aula consiste en esperar que, cuando los alumnos enfrentan situaciones problemáticas de interés son capaces de explorar formas de representarlas en términos matemáticos, de explorar las relaciones que aparecen en esas representaciones, manipularlas y desarrollar ideas poderosas que se pueden canalizar hacia las matemáticas que se desea enseñar (Lehrer y Schauble, 2000; Lesh e English, 2005).

Las intenciones que se asocian con la introducción de la modelación al salón de clase son loables, sin embargo, las dificultades que se pueden presentar al hacerlo son muchas y esto, a su vez, puede interferir de manera negativa si los profesores que la utilizan no tienen la formación adecuada para hacerlo. La investigación en solución de problemas ha mostrado ya las enormes dificultades que los alumnos tienen cuando intentar "traducir" al lenguaje matemático los enunciados de los problemas verbales. El caso de la modelación de situaciones reales es más complejo aún. En estas circunstancias, los estudiantes deben interpretar la situación que se les da y determinar las variables que pueden considerarse importantes para describir de manera certera el problema de interés. Requieren formular hipótesis que les permitan simplificar adecuadamente la situación problemática y representarla a través de funciones matemáticas. Estas funciones incluyen por lo general parámetros que admiten ajustarse a diversas situaciones que comparten una misma estructura matemática y deben manipularse, además de representarse de diversas maneras, para lograr obtener una respuesta adecuada al problema deseado.

Las dificultades de los estudiantes en cada uno de los pasos señalados son enormes. En algunos casos han llevado a los investigadores a preguntarse si la enseñanza de las matemáticas por medio de la modelación requiere enseñar las matemáticas además de enseñar explícitamente las técnicas matemáticas de modelación, en cuyo caso el tiempo que insumiría un curso de esta naturaleza lo haría inviable en una institución escolar. Otros investigadores, en cambio, ponen énfasis en las bondades del uso de la modelación y en las matemáticas que los alumnos pueden aprender cuando se utiliza esta metodología de enseñanza. A pesar de que coinciden en los problemas que los estudiantes pueden enfrentar, consideran que el hecho mismo de enfrentarlos y hacerlos conscientes de ello favorece el aprendizaje.

Surgen así diversas preguntas que se plantean cuando se discute la introducción de la modelación a la enseñanza de las matemáticas. Entre éstas podrían mencionarse las siguientes: ¿qué se entiende por modelación en el ámbito de la investigación en educación matemática?; ¿cómo introducir la modelación a la clase de matemáticas?; ¿se trata de una nueva forma de abordar la solución de problemas o de construir un espacio de aprendizaje de las matemáticas?; ¿qué problemas se plantean al introducir la modelación a la clase de matemáticas?; ¿de qué manera introducir la modelación para que permita la evolución de los esquemas conceptuales matemáticos de los alumnos?

En este artículo se intenta dar respuesta a algunas de estas preguntas, en particular, en el nivel universitario. Para ello, en primer término, se describirá la discusión que se ha dado históricamente en torno a la idea de modelación matemática y cuáles son las posturas que se adoptan en la actualidad cuando se discute en la investigación en educación matemática la introducción de esta estrategia de enseñanza. Se describirán, en segundo término, algunas experiencias de uso de la modelación en la enseñanza del álgebra lineal y de las ecuaciones diferenciales a alumnos de distintas licenciaturas, las dificultades encontradas y la forma en que se ha optado por introducir con éxito los conceptos matemáticos a enseñar. En tercer término, se hará énfasis en la discusión de los resultados obtenidos en la experimentación con esta metodología de enseñanza para, finalmente, concluir acerca de las posibilidades de introducir la modelación como metodología de enseñanza de las matemáticas, sus ventajas y sus principales dificultades. Se intentará presentar un panorama de las implicaciones que puede tener el uso de esta metodología en el aula, en particular, con respecto al aprendizaje de las matemáticas en la universidad.

Breve reflexión histórica acerca de los modelos matemáticos

De acuerdo con Israeli (1996), historiador de la ciencia, desde hace varios siglos las matemáticas además de ser, por excelencia, útiles para actuar sobre la realidad y modificarla son sobre todo un instrumento importante para comprenderla. A través de los años se ha dado un procedimiento que puede denominarse matematización de la realidad o modelación matemática que consiste en el uso de las matemáticas para describir y analizar al mundo, para desarrollar técnicas y tecnologías que intervienen sobre éste activamente.

Aunque en ocasiones se utiliza el término modelación matemática de manera natural y muy general —como toda forma de descripción matemática de una clase de fenómenos— según este autor, pocas veces se considera que lo que ahora se denota por este término es una forma de matematización específica que surgió hasta el siglo XX, con ciertas peculiaridades que la distinguen de otras formas de matematización utilizadas con anterioridad. Entre estas peculiaridades se encuentran, por una parte, la renuncia a cualquier tentativa de llegar a una visión unificada de la naturaleza, dado que un modelo matemático se aplica a un "pedazo" de la realidad, y, por otra, el método de modelación por analogía matemática, en el que se considera que una forma de matematización específica unifica sólo aquellos fenómenos que puede representar, por diversos que aparentemente sean, pero no a todos los fenómenos.

¿Cómo se llegó a esta forma de intentar entender la realidad? Según Israeli la historia del uso de los modelos matemáticos para describir el mundo puede dividirse en cuatro etapas:

1. La época pitagórica en la Grecia antigua en la que se consideraba que el mundo podía describirse aplicando relaciones entre números o, dicho de otra forma, se consideraba a los números como la forma perfecta para describir al universo. En esta época el uso de las matemáticas estaba ligado a una visión de tipo religiosa y dominada por los mitos.
2. La revolución científica de Galileo impuso una visión distinta de la relación de las matemáticas con la descripción de los fenómenos naturales. Esta visión considera que las leyes que rigen a la naturaleza están escritas en lenguaje matemático y que la tarea del investigador es develar las leyes escondidas que la regulan. Este punto de vista se refuerza con la aparición del trabajo de Newton que da origen a lo que puede llamarse un programa mecanicista.
3. La visión mecanicista del universo, muy influida por la mecánica de Newton, domina el pensamiento científico por muchos años, se considera incluso, en ocasiones, que aún no ha muerto. En la concepción mecanicista todos los fenómenos del universo resultan del movimiento de los cuerpos: de alguna manera, al inicio de esta época, todos están regidos por las leyes de la mecánica de Newton, que se expresan en términos de las matemáticas o se pueden relacionar de alguna manera con éstas. Aunque después se abandonó la relación específica con las leyes de la mecánica clásica, se preservó la idea de que la ciencia debe ofrecer una imagen unitaria y objetiva del universo. Las distintas teorías científicas deben estar relacionadas y deben ser coherentes entre sí; deben formar una construcción unitaria dentro de la cual la mecánica clásica juega un papel primordial. Las matemáticas, en esta visión, no son ni un lenguaje, ni una técnica separada de la naturaleza sino que se desprenden de ésta y están en ésta.
4. Desde principios del siglo XX, cuando la física clásica entró en crisis y hasta la actualidad, el punto de vista dominante se opone a la idea mecanicista. Se habla de modelos matemáticos o de matemáticas aplicadas, en plural, lo que niega la visión unitaria de la ciencia. Se dejó, paulatinamente, de mencionar modelos de tipo mecánico para dar lugar a formas de describir los fenómenos a partir de la analogía de las estructuras matemáticas subyacentes a éstos.

Hoy el interés por la modelación matemática ha pasado a ser de sólo un dominio de quienes se dedican a las matemáticas aplicadas a un área de interés para la educación matemática. En este contexto la idea de modelación, ligada a la visión predominante en la actualidad, se reconoce fundamental en la enseñanza misma de las matemáticas. A continuación se abordará aquello que se entiende por modelación en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

¿Qué se entiende por modelación?

El uso de la modelación en la escuela se muestra de diferentes maneras según los puntos de vista desde donde se mire la didáctica y de acuerdo a los objetivos de la actividad. Actualmente hay estudios con enfoques muy variados que han sido caracterizados dentro de grupos de acuerdo a algunas perspectivas comunes (Kaiser y Sriraman, 2006). Distintas perspectivas dan lugar a diferentes visiones tanto de la aplicación de la modelación en el aula como de la investigación acerca de su uso. Todas comparten, de alguna manera, el énfasis en la utilidad de la modelación en la enseñanza de las matemáticas dado que los resultados de investigación muestran que, cuando se aprenden directamente los conceptos de las matemáticas no es fácil aplicarlos a la solución de problemas. El proceso por el cual se puede llegar a la aplicación toma bastante tiempo y, en muchas ocasiones, es necesario desarrollar algunas estrategias a fin de que los estudiantes transfieran sus conocimientos a esas aplicaciones. Se analiza a continuación algunas de las perspectivas aplicadas en términos de sus objetivos centrales respecto al uso de la modelación.

Desde una perspectiva realista, el interés se enfoca en la resolución de problemas reales que tengan sentido práctico para los alumnos. Se pretende que ellos desarrollen herramientas para comprender el mundo en el que viven y que entiendan cuáles son los componentes de los modelos matemáticos. Dentro de esta perspectiva también se encuentran las de modelación contextuales cuyo interés radica en la solución de problemas reales, pero con una preocupación central en la relación de este proceso de solución con el sujeto que los resuelve y con el contexto en el que el modelo se crea, para comprender la naturaleza misma del proceso de modelación y las distintas restricciones que sobre éste ejerce el medio en el que surge la necesidad de modelación.

Otra perspectiva que se categoriza como modelación educativa tiene, como su nombre lo indica, un objetivo claramente pedagógico. Aquí, se pueden distinguir dos tipos de corrientes, una didáctica en la que los modelos se utilizan para estructurar y promover el proceso de aprendizaje de los alumnos, y otra que se puede considerar de carácter conceptual en la que el papel de la modelación es clave para introducir nuevos conceptos y para desarrollarlos.

Por último, se menciona una perspectiva de modelación cognitiva que tiene intereses de tipo psicológico como es, por ejemplo, el análisis de los procesos mentales que tienen lugar durante la modelación. Su finalidad es comprender la forma en que se piensa cuando se usa la modelación en la solución de problemas, o bien promover los procesos de pensamiento matemático mediante el uso de modelos.

Es importante mencionar que —entre los estudios que se desarrollan en estos días en torno a la modelación— es difícil encontrar ejemplos que caigan claramente en una de estas categorías. Aun cuando sea posible clasificarlos dentro de una de estas perspectivas, siempre contienen elementos que pueden considerarse como pertenecientes a otras. Seguidamente se muestran algunos ejemplos de acercamientos a la modelación matemática con el fin de ilustrar ciertas características de las distintas perspectivas.

En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, hace aproximadamente 30 años, surgió un movimiento de reforma en Holanda que se consolidó en una postura teórica que hoy se conoce como enseñanza realista de las matemáticas. Esta postura considera a las matemáticas como una actividad humana y, como tal, se desarrolla a partir de modelos originados de situaciones en un contexto específico real, de fantasía o formal. Lo importante en esta perspectiva es que estos contextos pueden ser reales para los estudiantes. Como metodología de aplicación se presentan al estudiante situaciones en contexto con las cuales trabaja para que conforme requiera matematizar la situación y convertirla en un modelo, "reinvente" las matemáticas. Los modelos funcionan entonces como puentes que conducen hacia una mayor comprensión de las matemáticas con la finalidad de que su conocimiento progrese y evolucione.

En la perspectiva de Freudenthal (1968), creador de esta teoría, si se desea que las matemáticas tengan valor, para los alumnos, deben estar conectadas con la realidad, permanecer cercanas a ellos y ser relevantes para la sociedad. En esta postura hay dos tipos de matematización: una horizontal que implica el proceso de partir de la situación real hacia el mundo de los símbolos, y otra vertical que describe los cambios que sufre la expresión matemática del modelo dentro del propio mundo de los símbolos (Freudenthal, 1991).

A diferencia de los acercamientos de solución de problemas, en los cuales al resolver problemas los alumnos pueden aplicar lo que han aprendido antes a una situación sin contexto, en esta propuesta el contexto funciona como la fuente del proceso de aprendizaje. Conforme trabajan en ese contexto son susceptibles de desarrollar herramientas matemáticas y conocimiento. El puente entre el conocimiento informal —relacionado con una situación específica— y el formal es un paso importante. En las matemáticas realistas este paso se describe como el "modelo de" al "modelo para" (Streefland, 1985; Gravemeijer, 1994; Gravemeijer y Doorman, 1999). Esta postura teórica considera que los estudiantes son agentes activos del proceso enseñanza-aprendizaje, ellos mismos, compartiendo experiencias, desarrollan herramientas e ideas matemáticas.

En otras perspectivas cercanas a la de las matemáticas realistas el uso de ejemplos auténticos —tomados de problemas de la industria o de las ciencias— juega un papel esencial. El proceso de modelación se concibe como un todo y no como algo parcial, cuyo objetivo es el desarrollo de acercamientos a la forma en que se trabaja en las matemáticas aplicadas y no el desarrollo de conceptos (Camarena, 1999 y 2000).

Otra forma de ver el problema de la modelación es considerarlo como un contexto de aprendizaje en el que se invita a los alumnos a cuestionar e investigar situaciones referidas a la realidad a través del uso de las matemáticas, que les brinda una oportunidad para discutir tanto el papel de éstas en la sociedad como la naturaleza de los modelos matemáticos. Cualquier representación de la situación a través de las matemáticas se considera un modelo matemático (Barbosa, 2003 y 2006). En estas posturas, el desarrollo de competencias o conceptos pasa a segundo plano y se conciben únicamente como medios para discutir el papel de las matemáticas y de los modelos como herramientas de poder en la sociedad. La actividad de los alumnos se centra en una lectura crítica de los modelos y en notar cómo dependen del lugar en el que se producen y de la forma en que se pueden emplear. La investigación ligada a las posturas de esta naturaleza puede centrarse en el desarrollo de competencias y habilidades, con cierto énfasis en que los estudiantes conozcan la práctica de quienes desarrollan modelos de manera profesional (Haines y Couch, 2005).

En contraste, hay perspectivas en las cuales además de considerar los aspectos sociales involucrados en la construcción de modelos, se intenta brindar a los alumnos oportunidades para desarrollar conceptos y procedimientos matemáticos (Zbiek y Conner, 2006). Algunos autores de esta perspectiva han propuesto que, cuando se presenta un problema real a los estudiantes se pueden definir rutas de modelación que describen lo que ellos hacen. En estas rutas juegan un papel importante para su definición: las discusiones matemáticas que refieren a los conceptos y procedimientos matemáticos, las tecnológicas relacionadas con la forma matemática que adopta el fenómeno modelado y las discusiones reflexivas sobre la naturaleza de los modelos y de los criterios empleados en la presentación de los resultados. De acuerdo a los propósitos del profesor, es posible que una de esas componentes juegue un papel más importante que otras (Borromeo Ferri, 2006; Barbosa, 2006).

Otras perspectivas dan menos importancia al hecho de que los problemas planteados a los estudiantes para modelar sean reales. Estos estudios consideran que toda la actividad matemática puede considerarse como una actividad de modelación y la describen a través de un conjunto de tareas, tecnologías, técnicas y teorías que se desarrollan conforme se trabaja en los modelos. Los autores que investigan la modelación en el aula desde esta perspectiva consideran que tanto temas extramatemáticos como temas intramatemáticos deben ser tratados en la enseñanza de las matemáticas dado que la actividad matemática no se restringe a la consideración de problemas aplicados a contextos reales.

Una de estas perspectivas es la desarrollada en el ámbito de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), que propone que toda la actividad matemática se puede identificar con una actividad de modelación (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), lo cual implica que la modelación no es un aspecto más de las matemáticas sino que la actividad matemática es en sí misma una actividad de modelación. Así, la preocupación central de las investigaciones en esta perspectiva no consiste en las relaciones entre las matemáticas y el mundo real u otras disciplinas, ni en la forma en la que los estudiantes pueden establecer esta relación, sino en el análisis y descripción de las condiciones y restricciones que permiten el desarrollo de lo que llaman procesos de estudio. Éstos comienzan a partir de problemas relevantes que pueden promover actividad matemática que se describe después en los términos teóricos propios de la TAD, las organizaciones matemáticas, de creciente complejidad en el contexto del aprendizaje y dentro de una institución específica (García *et al*. 2007).

Entre las varias posturas existentes en el ámbito de la modelación, la llamada modelos y modelación enfatiza la construcción, por parte de los alumnos, de sistemas conceptuales o modelos cuando trabajan con una situación en contexto que favorece el proceso de matematización. Su preocupación es la preparación de los estudiantes en la solución del tipo de problemas a los que normalmente se enfrentan fuera de la escuela y en el logro de formas de trabajo con ese tipo de problemas que puedan relacionarse con los temas que se estudian en las matemáticas escolares, aunque esa relación no sea clara y evidente. En esta línea de investigación el interés se centra en que los estudiantes desarrollen formas flexibles y creativas de pensar que les permitan abordar las situaciones que se les presentan (Lesh y Doerr, 2003; Lesh e English, 2005; Lesh y Sriraman, 2005).

Al trabajar con estos problemas —llamados actividades que elicitan modelos— los estudiantes no producen únicamente respuestas a las cuestiones planteadas por el problema, sino que desarrollan herramientas conceptuales que pueden ser manipuladas, modificadas, comunicadas y reutilizadas en otras situaciones. Los investigadores que han experimentado con esta teoría diseñan problemas que conducen a secuencias de instrucción en las cuales los estudiantes trabajan en grupo con situaciones reales que permiten la "elicitación" de constructos matemáticos, que pueden después ser elaborados y extendidos hasta llegar a un sistema generalizable, o modelo, susceptible de ser empleado en diversas situaciones. Las explicaciones, justificaciones y elaboraciones que hacen los estudiantes se consideran parte integral del proceso de modelación.

Desde el punto de vista de la teoría modelos y modelación la matemática es una ciencia en la que la búsqueda de patrones es preponderante. Su aprendizaje debe llevarse a cabo en un ambiente que favorezca y promueva procesos de cuestionamiento y de reflexión, que a su vez conduzcan a la comprensión de los fenómenos a través del uso de recursos matemáticos. Por ello, se ha desarrollado criterios que los problemas a presentar a los estudiantes deben satisfacer para lograr lo que se considera más importante: que los alumnos desarrollen ideas matemáticas poderosas que les permitan analizar la situación a la que se enfrentan y que puedan, posteriormente, ser aplicadas como herramienta conceptual para resolver otros problemas que en apariencia no están relacionados con el que han trabajado, pero que pueden tratarse con las mismas ideas matemáticas.

En la actividad de modelación, la búsqueda de relaciones entre variables, que los estudiantes deben desarrollar, se constituye en una actividad fundamental y se expresan a través de modelos matemáticos. Así, los sistemas conceptuales, los sistemas cognitivos y los modelos se usan como ingredientes esenciales para explicar los procesos de comprensión de los conceptos matemáticos por los estudiantes. Sin embargo, esta postura teórica ofrece poca información acerca de la forma en que los estudiantes desarrollan nuevo conocimiento o construyen modelos más robustos.

De la ejemplificación que se ha hecho hasta aquí de algunas de las perspectivas de modelación se desprende que, independientemente del acercamiento prioritario que se tome, todas comparten algunas características. Entre éstas que el contexto en el que se plantea y se resuelve el problema debe tener sentido para los estudiantes, aunque el sentido pueda venir de las matemáticas mismas; que no hay una solución específica esperada, sino que es deseable que los alumnos desarrollen procesos diversos de razonamiento de los cuales puedan surgir conceptos para abordar la tarea. Si bien, en muchas ocasiones, son los conceptos que se quieren desarrollar el foco primordial de la actividad para el profesor, en la mayor parte de los acercamientos a la modelación se intenta, más bien, aprovechar las ideas que surgen de los estudiantes para introducir conceptos importantes de la matemática. En general, los proponentes de la modelación como actividad de aprendizaje y de construcción de conocimientos sugieren que como resultado de esa actividad los estudiantes ponen de manifiesto sus diversas formas de pensar y de abordar los problemas y ello favorece el desarrollo de sus sistemas conceptuales.

Seguidamente, se muestra el trabajo realizado por un grupo de investigadores del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), que está experimentando la posibilidad de enseñar matemáticas a nivel universitario a través del uso de la modelación. La perspectiva que se ha utilizado en este esfuerzo es una perspectiva mixta de carácter educacional. Los objetivos del proyecto de enseñanza e investigación son de carácter pedagógico. Se pretende promover los procesos de aprendizaje de los alumnos, pero además introducir conceptos nuevos para ellos y desarrollar sus estructuras conceptuales a través de la introducción en la clase de problemas reales que posibiliten la emergencia de ideas matemáticas como se hace en la perspectiva modelos y modelación. A diferencia de esta perspectiva, estas ideas se toman explícitamente como base para apoyar la introducción de los conceptos matemáticos relacionados con la situación que se modela y para lograr un aprendizaje significativo de los mismos, se utiliza una teoría de desarrollo conceptual del ámbito de la educación matemática: la teoría acción, proceso objeto, esquema (teoría APOE).

Acercamiento al uso de la modelación en la enseñanza en México

En los últimos años un grupo de profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática del ITAM, preocupados por lograr mejores resultados en los cursos, indagaron acerca de distintas metodologías de enseñanza basadas en la investigación educativa, que podrían proporcionar ideas para diseñar estrategias innovadoras de enseñanza.

En la búsqueda y análisis de diferentes acercamientos encontraron amplia bibliografía que refería a las posibilidades de aprendizaje y de motivación que brinda la enseñanza de las matemáticas a través de la modelación matemática. Los resultados de los estudios consultados sugerían que, en un contexto de modelación los estudiantes son capaces de desarrollar conceptos importantes y aprenderlos de manera significativa. Si bien la mayoría de los artículos consultados describían experiencias llevadas a cabo con estudiantes de los niveles de enseñanza básica y media superior, las premisas elementales de su posible utilidad parecían ser aplicables en nivel superior.

Después de un análisis de las distintas perspectivas de modelación que se han mencionado, el grupo se decidió por el uso de una perspectiva mixta en la que se complementara una perspectiva de modelación con una teoría de aprendizaje de las matemáticas, a fin de garantizar el aprendizaje y desarrollo de los conceptos por parte de los estudiantes. Así, se procedió a elaborar un marco teórico en el que se incluyen las ideas acerca de la importancia de la modelación en el aprendizaje de las matemáticas y en el desarrollo de ideas poderosas y de herramientas conceptuales de la perspectiva modelos y modelación; pero, dado que, como se mencionó esta perspectiva no describe la forma en la que los estudiantes pueden aprender nuevos conceptos específicos, se complementó el marco conceptual mediante la introducción de la teoría APOE que describe en detalle la forma en que se construyen los conceptos matemáticos que se estudian en la universidad.

A partir del marco teórico diseñado, se discutió el tipo de problemas a experimentar en el salón de clase en las materias —sistemas dinámicos, ecuaciones diferenciales, matemáticas aplicadas a las ciencias económicas y algebra lineal— que se imparten en carreras administrativas, en ingeniería, economía, en las de matemáticas aplicadas y actuaría de dicha institución. Se diseñaron actividades específicas de modelación aplicables a cursos diversos y se procedió a probarlas en el aula. En todas las ocasiones que se experimentó con el uso de esos modelos, los estudiantes trabajaron durante la clase y, en ocasiones, fuera de ésta en equipos de tres o cuatro miembros, con el fin de que discutieran y socializaran los conocimientos. Se exponen tres de esos modelos, dos relacionados con las ecuaciones diferenciales y uno con el álgebra lineal así como sus resultados.

Modelo de precios

Problema

Una compañía requiere la forma en la que pueda predecir el precio, de cualquiera de sus productos, en un mercado en el que hay expectativas de los consumidores. El gerente de la compañía solicita colaboración para encontrar un modelo adecuado, además de una presentación en la que se justifique con claridad por qué se considera que el modelo es pertinente y se proporcione información del mercado real que permita validar su pertinencia.

Objetivos

El problema se utilizó en una clase de matemáticas aplicadas a la economía como parte de los temas correspondientes a las ecuaciones diferenciales. Su objetivo fue introducir en los alumnos la idea de variación y su posible expresión mediante el uso de ecuaciones diferenciales, así como la noción de solución de una ecuación diferencial y el papel e importancia de las condiciones iniciales. Un propósito secundario del problema consistió en hacer trabajo experimental para considerar la función que los parámetros tienen en la modelación.

El modelo en clase

Los estudiantes trabajaron en forma colaborativa durante varias sesiones en el salón de clases en grupos de tres. El proyecto requirió además trabajo fuera de clase y búsqueda de datos de cualquier artículo, del cual los alumnos pudieran conseguir precios para un periodo relativamente largo de tiempo para validar el modelo.

La solución del problema se llevó a cabo durante un mes y fue posible observar varios ciclos de modelación. Se dedicó cierto tiempo a la discusión conjunta entre el profesor y los alumnos de cada uno de los modelos propuestos por los distintos equipos. Los alumnos que presentaban el modelo respondían a las preguntas de sus compañeros y a las del profesor justificando las decisiones tomadas durante el periodo de trabajo previo. Esta discusión permitió a cada equipo cambiar su modelo y restricciones a partir de la reflexión de las preguntas y comentarios que se les había formulado.

Durante el trabajo, en el proyecto de modelación, se detectaron como se mencionó varios ciclos de modelación que podrían clasificarse como: selección de variables y trabajo en la búsqueda de relaciones entre éstas; introducción de la razón de cambio como una variable importante a considerar; refinamiento del modelo y primer análisis; búsqueda de soluciones y de formas de trabajar con los parámetros; experimentación, representación y análisis de los datos; diseño de la presentación.

En el primer ciclo, los estudiantes abordaron el problema como de relación entre funciones, buscaron posibles gráficas de funciones que describieran el comportamiento esperado de los precios de un bien, utilizando lo que habían aprendido en sus clases de economía. La exploración gráfica y la discusión sobre las posibles variables relevantes y su relación los condujo a considerar la necesidad de plantear algunos supuestos, relacionados con sus conocimientos de economía y matemáticas que les permitieran simplificar el problema. En la primera discusión se trataron primordialmente el papel de los supuestos en la modelación y el papel que jugaba el hecho de que hubiera expectativas de precios en el mercado.

En tanto, en el segundo ciclo los estudiantes consideraron la relación de la expectativa de precios con la razón de cambio de éstos. Los primeros modelos incorporando la función precio y la derivada del precio comenzaron a aparecer. La discusión se centró, con posterioridad, en la importancia de esa relación y en la consideración del modelo resultante como ecuación diferencial. No todos los equipos plantearon una ecuación diferencial, pero la discusión con quienes sí la habían introducido permitió al resto de los grupos su consideración.

Construido un modelo —no precisamente el mismo en los distintos equipos de trabajo— los alumnos procedieron a refinarlo, es decir, a reducir, cuando era posible el número de parámetros que les parecían indispensables y a considerar su pertinencia. Es importante notar que los estudiantes no habían sido introducidos a las ecuaciones diferenciales y no conocían métodos de solución; no obstante, algunos de ellos fueron capaces de utilizar lo que conocían acerca de la derivada de una función para tratar de dibujar una posible gráfica de la solución y considerar si podría considerarse adecuada. Después de este ciclo, el profesor consideró oportuno introducir algunas actividades referentes al análisis de ecuaciones diferenciales recurriendo al conocimiento del cálculo de una manera estructurada, para esbozar la forma de la solución así como algunas definiciones, y el concepto de solución de una ecuación diferencial.

En un primer esbozo de las posibles soluciones al problema, los alumnos consideraron el papel de las condiciones iniciales. En este ciclo se introdujeron nuevas actividades conceptuales relacionadas con métodos de solución de ecuaciones diferenciales que los estudiantes fueron capaces de utilizar para encontrar la solución de sus modelos. Diseñaron la forma en que buscarían los datos para validar sus modelos y para calcular los parámetros específicos a la situación. Aplicaron, además, métodos numéricos simples o gráficos para encontrar el valor de los parámetros que reflejaba de mejor manera la situación en estudio y trabajaron en la presentación final.

Toda la labor de los alumnos quedó registrada durante cada ciclo. En los periodos de discusión se recurrió a guías de observación para seguir en detalle el trabajo de cada uno de los grupos, y se grabó la discusión de cada uno de éstos para ser analizada por el investigador.

Resultados interesantes

El trabajo de los grupos dio lugar a una diversidad de modelos —cuatro modelos distintos entre sí. Los estudiantes se acercaron al problema aplicando una perspectiva de covariación en la que su interés radicaba en encontrar el posible comportamiento de las variables. Después de la primera discusión en grupo, la mayor parte de éstos consideró una perspectiva dinámica en la que el objeto de estudio era la función derivada (Trigueros, 2008).

Si bien los estudiantes introdujeron la derivada en sus modelos, mostraron dificultades para relacionar la derivada de la función con la función en una misma ecuación debido a que su concepción de función y de derivada, de acuerdo a la teoría APOE podían considerarse de tipo proceso, es decir, la función como una regla que se le aplica a una variable y que resulta en una nueva variable relacionada y la derivada como una operación que se aplica a la función. El trabajo en las actividades, colaborativo y en conjunto, permitió a los estudiantes establecer la relación entre la función y su derivada, considerando a esta última como una función que proporciona información sobre la función original. Fue interesante notar que esta relación surgió en lo básico del análisis del problema en términos económicos conjuntamente con una estrategia de representación gráfica del problema.

El análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales, basado en algunas ideas presentadas por los estudiantes e introducido, en las actividades conceptuales sobre las que trabajaron posteriormente resultó efectivo. Ellos lo utilizaron para reflexionar en la ecuación diferencial como un objeto de estudio y en la solución de la ecuación diferencial como una función. Esta reflexión se apoyó también en las distintas relaciones y en el trabajo que los estudiantes hicieron para aproximar numéricamente la solución a la situación particular que habían elegido. A diferencia de lo que se ha reportado en la literatura (Rasmussen, 1999 y 2001; Donovan, 2007), estos alumnos no mostraron ninguna dificultad al dar significado a la solución de la ecuación diferencial como una función o un conjunto de funciones; fueron capaces de transferir su noción de solución a problemas relacionados con la solución de ecuaciones diferenciales abstractas, que se utilizaron como tareas durante el periodo en que se trabajó sobre el proyecto.

Un resultado muy interesante fue la posibilidad de un grupo de crear una representación del problema muy semejante al espacio fase para analizar el comportamiento de la solución, alrededor de lo que ellos consideraron como solución de equilibrio, noción que juega un papel importante en economía. La introducción de esta herramienta fue aprovechada por el maestro para discutir algunos aspectos relevantes del análisis cualitativo y del papel de los parámetros y la variación de los parámetros en la solución del problema.

El reloj de péndulo

El problema

¿Qué tan efectivo es el uso de un péndulo como reloj? ¿Cómo podría probarse su efectividad si lo es? Construye un reloj de péndulo. Este reloj será mostrado en una exposición, por ello es necesario que sea acompañado de una explicación de su funcionamiento a dos niveles: una comprensible para el público en general, y otra para los profesores de los departamentos de ingeniería y matemáticas.

Objetivos

El problema fue aplicado con estudiantes de ingeniería en computación y en telemática en un curso de ecuaciones diferenciales. Los objetivos primordiales de este proyecto de modelación consistían en ampliar la noción de variación previamente trabajada, aplicando otros modelos para introducir las ecuaciones diferenciales de segundo orden; así como recuperar algunos de los conceptos que los estudiantes aprendieron en sus cursos de física para relacionarlos con los desarrollados en el contexto de este curso específico de matemáticas.

El modelo en clase

El desarrollo del problema en el salón de clase fue de manera similar a la descrita para el problema de precios. Nuevamente se detectó ciclos en los cuales era posible observar la evolución de algunos aspectos relacionados con el conocimiento de los estudiantes respecto a las ecuaciones diferenciales, y también en relación con la transferencia de los conocimientos de física a la clase de matemáticas.

A diferencia de lo descrito en el caso del grupo que trabajó el problema de economía, este equipo tuvo muchas más dificultades para relacionar sus conocimientos de física con los de matemáticas, lo cual resultó en que, el primer ciclo relacionado con la elección de las variables a estudiar tomara más tiempo que el esperado por el maestro y el investigador (un mes). En el estudio del péndulo, la variable dependiente que simplifica el problema es el ángulo que hace el péndulo con la vertical y se esperaba que los alumnos utilizaran este hecho con facilidad. En el segundo ciclo, en el que también se esperaba que el uso de las leyes de Newton aplicadas al problema resultara casi directamente en una ecuación diferencial, resultó asimismo más complicado de lo esperado. Los alumnos encontraron muchas dificultades para determinar las fuerzas que actúan sobre el sistema y más aún para descomponer las fuerzas en componentes. Trataban de relacionar el problema con lo que conocían del oscilador armónico simple, sin embargo, aunque conocían la fórmula para la fuerza no lograban transponerla para el caso del péndulo. Los alumnos requirieron mucho trabajo y apoyo por parte del maestro para superar estas dificultades.

Una vez que los alumnos encontraron la ecuación diferencial de segundo orden, en lo que se consideró el tercer ciclo, intentaron aplicar lo que habían aprendido respecto al concepto de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden y al análisis cualitativo de éstas. Dado que la ecuación resultante era de segundo orden desistieron del análisis cualitativo; ninguno consideró la posibilidad de utilizar el sistema de ecuaciones que habían propuesto de manera natural antes de llegar a la ecuación de segundo orden.

Los estudiantes manejaron lo aprendido —en el caso de solución de ecuaciones de primer orden lineales— para encontrar las funciones solución de la ecuación de segundo orden una vez que lograron expresarla de forma lineal —al tomar en consideración que para valores pequeños del ángulo, el seno de éste se puede aproximar por el valor del ángulo— además de reconsiderar el papel de las condiciones iniciales que aparecían de nueva cuenta en los modelos planteados. Tampoco mostraron mayores dificultades para suponer las diferentes situaciones que se podían presentar: sin fuerzas externas, con fricción y con otras fuerzas externas además de la fricción.

En la aplicación de la construcción del reloj, al inicio estimaron que únicamente un péndulo ideal podría modelar un reloj, porque para ellos sólo en ese caso la frecuencia permanecería constante. Después reconsideraron este punto al analizar con cuidado las soluciones, y concluyeron que la descripción del funcionamiento de un reloj requeriría el uso de una ecuación para un oscilador forzado.

Resultados interesantes

Todos los grupos mostraron dificultades con los conceptos de física. Lo cual interfirió con la posibilidad de interpretar los resultados que obtenían de la solución matemática de las ecuaciones en términos de la física. Al parecer, al enfrentar un contexto nuevo sus ideas previas resurgían y las estrategias de solución de problemas no eran tan sólidas como para realizar comparaciones y analogías con casos de problemas en los que estas preconcepciones no se presentan.

Los patrones de razonamiento de los estudiantes se guiaban en un primer momento por lo que eran capaces de observar y no por sus conocimientos de física. Podría decirse que para la mayoría de ellos la física y las matemáticas constituyen disciplinas ajenas. Mostraron más dificultades para utilizar el conocimiento matemático aprendido en otros cursos e incluso en el mismo en que se desarrolló el proyecto de modelación. Para lograr superarlas fue necesario realizar más actividades de tipo conceptual que reforzaran el papel de la variación y de la segunda variación en el problema matemático.

La construcción del reloj, por otra parte, y la posibilidad de trabajar con datos reales constituyó una fuente de aprendizaje para el grupo. Esta construcción les permitió reconsiderar sus dificultades y el significado de las variables en términos del problema específico y en términos de la física. Reflexionaron las dificultades implicadas en la generación y análisis de datos, aprendieron nuevas técnicas de aproximación de parámetros, además de los conceptos relacionados con el curso en sí.

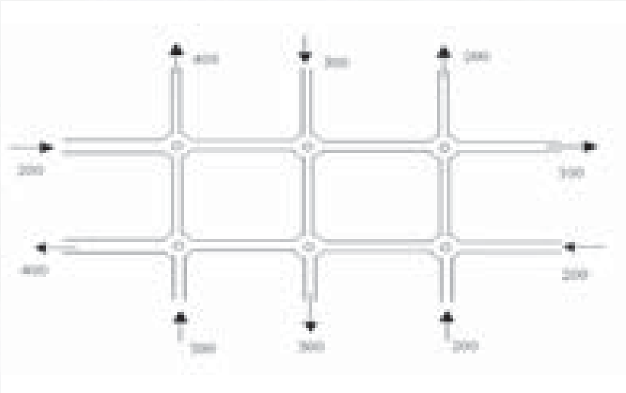
A pesar de las dificultades encontradas, los datos de esta experiencia pusieron de manifiesto la utilidad del empleo de los modelos en la enseñanza. La discusión de ideas y el análisis entre los alumnos y con el profesor procuró su evolución. La presentación del proyecto mostró claridad en las explicaciones y en las justificaciones argumentadas por los distintos equipos, aun cuando no todos mostraron el mismo grado de avance.

Trabajar en el proyecto brindó a los estudiantes una oportunidad para aplicar lo aprendido, relacionar lo estudiado en cursos diferentes y poner en juego sus ideas sobre la naturaleza misma del trabajo científico, a través de la experimentación y la comunicación. También ofreció múltiples ocasiones de reflexión sobre los conceptos matemáticos involucrados en la solución de ecuaciones diferenciales y les facilitó desarrollar algunos nuevos como los involucrados en el método de mínimos cuadrados para la aproximación de curvas a datos experimentales. La metodología de trabajo le permitió a este grupo tomar a su cargo el reto que el problema implicaba y ampliar su visión de lo que significa el uso de las matemáticas y de la física en la solución de problemas reales (Trigueros, 2006).

Problema de tráfico

El problema

La Dirección General de Tránsito ha instalado sensores que le permite contar la cantidad de vehículos que pasan por cada una de las calles en áreas específicas de la ciudad, en particular una zona del área financiera en cuyas esquinas hay glorietas que permiten redirigir el tráfico. El número de vehículos promedio que pasan por las calles por hora se muestra en el siguiente diagrama. No está permitido estacionarse en ninguna de las calles. Las flechas indican el sentido de las calles. La Dirección General de Tránsito desea desarrollar políticas de manejo de tráfico que pueden ser necesarias en caso de que se hagan trabajos en las calles o de que ocurran manifestaciones u otras actividades disruptivas.



Si se pide que por una de las calles entre dos esquinas circule una mínima cantidad de autos: ¿cuál debe ser esa cantidad si se desea que el tráfico normal en estas calles se mantenga? ¿Es posible cerrar alguna de las calles? Si es así ¿cuál?

Si se cierra una calle sería necesario poner señales para indicar a los conductores el inicio de cada una de las calles cerradas. ¿Cuántas señales habría que poner? ¿Sería posible considerar una restricción de que no circularan más de 200 autos por hora en una calle particular?

Objetivos

Con este problema se pretendía que, además del desarrollo del modelo, los estudiantes utilizaran sus conocimientos acerca de la solución de sistemas lineales de ecuaciones algebraicas y los desarrollaran para incluir entre éstos la noción de conjunto solución de un sistema de ecuaciones. Lo cual la literatura en educación matemática reporta como una de las dificultades en el estudio de este tema de las matemáticas (Ramírez, Oktaç y García, 2005a y b; Trigueros, Oktaç y Manzanero, 2007), el método de Gauss para resolver sistemas grandes de ecuaciones, las representaciones gráficas de los sistemas de ecuaciones y el significado gráfico del conjunto solución.

El modelo en clase

Se encontró que en el trabajo con el modelo se podían detectar ciclos de modelación en la actividad de los alumnos que, en este caso consistieron de: selección y relación entre variables, manipulación del sistema de ecuaciones, representación matricial y su manipulación, respuesta a preguntas específicas y representación gráfica del espacio solución.

En el primer ciclo, los estudiantes usaron su conocimiento sobre los sistemas de ecuaciones como se tenía previsto. Sin embargo, dado que el sistema a resolver era grande y contenía más incógnitas que ecuaciones, los alumnos enfrentaron dificultades al aplicar su conocimiento en este caso específico. Para ayudarles a superar esta dificultad se introdujeron actividades desarrolladas a la luz de la teoría APOE, cuya finalidad era la introducción de nuevos conceptos y estimular la reflexión sobre sus propias acciones, a fin de que fueran capaces de generalizarlas y utilizarlas en el desarrollo de procesos más eficaces de solución de sistemas de ecuaciones, que pudieron, posteriormente, aplicar al trabajo con el modelo. Así, a través de los ciclos se alternó también entre la actividad de modelación y el uso de actividades destinadas a la construcción de los conceptos relacionados con este tema del álgebra lineal.

Resultados interesantes

Los estudiantes encontraron múltiples dificultades a lo largo del proceso de modelación, algunas como la definición misma de las variables puede considerarse sorprendente en alumnos universitarios; otras predecibles por la naturaleza del modelo a plantear. Diferentes equipos propusieron modelos distintos, y una actividad interesante en las sesiones de discusión con el grupo en su totalidad fue la comparación de los sistemas y de sus conjuntos solución para discutir cuestiones relacionadas con la equivalencia de los sistemas y los distintos tipos de solución obtenidas.

Luego de la introducción de la representación del sistema mediante matrices, los alumnos no sólo emplearon lo recién aprendido en la solución de su modelo sino que relacionaron con claridad los elementos de la matriz con el sistema de calles presentado en la figura; después, en el trabajo conjunto con el profesor discutieron el significado de los signos en relación con las glorietas de cada esquina y en ocasiones el maestro introdujo algunas nociones nuevas que podían ser de interés para los estudiantes.

El ejercicio con los parámetros del modelo resultó en particular interesante para los alumnos. Es conocida la dificultad que los estudiantes tienen, aun los universitarios, con la interpretación y el manejo de parámetros (Furinghetti y Paula, 1994; Bloedy-Vinner 2001; Trigueros y Ursini, 2004). En este caso como en los anteriores, el problema específico a resolver fue un apoyo en la interpretación de los parámetros. Esto permitió que se analizaran junto con el maestro las características de las soluciones factibles al problema; así como, utilizando diferentes parametrizaciones, la interpretación del espacio de soluciones factibles podía ser más o menos fácil. Se llegó incluso a sugerir una representación geométrica del espacio de soluciones factibles y se discutió el significado de dicha representación en términos del problema a resolver.

La labor en clase demostró que este problema satisface los criterios de un buen problema de modelación establecidos en la perspectiva de modelos y modelación, y permitió la introducción de actividades de construcción de conocimiento diseñadas con la teoría APOE sin romper demasiado con la dinámica de la modelación. Fue posible seguir —mediante los productos entregados por los alumnos en las distintas etapas del proceso— la evaluación de su manera de pensar sobre el modelo y las dificultades que enfrentaban. Los modelos desarrollados fueron utilizados como herramientas conceptuales en la solución de problemas semejantes en su estructura planteados en contextos diferentes, pero siempre relacionados con la solución de sistemas de ecuaciones (Possani, *et al.*, 2009).

A destacar

Una de las peculiaridades que vale la pena resaltar y que es común a las experiencias descritas —u otras semejantes realizadas por el mismo grupo de investigadores o por otros en nuestro país y en el extranjero— es la enorme motivación de los estudiantes. En todos los casos ellos se apropiaron rápidamente del problema, las discusiones en clase y el trabajo fuera de ésta mostraron el interés por comprender la situación y trabajarla de la mejor manera posible. Si bien los problemas elegidos eran parecidos a los que están resueltos en algunos libros de texto, los estudiantes no recurrieron a éstos en ninguno de los casos y sólo hicieron uso de textos relacionados con la física y con la economía a fin de comprender algunas de las variables del problema en sí y no para encontrar una solución.

En las discusiones cada equipo defendió sus puntos de vista y la plausibilidad de su modelo. En ocasiones, incluso, les fue difícil aceptar algunas críticas acertadas de sus compañeros; no obstante, cuando las aceptaron, manifestaron lo útil que les fueron para refinar o reconsiderar su razonamiento en el planteo del modelo. Asimismo, se observó el interés que pusieron los alumnos en las actividades conceptuales como oportunidad para encontrar nuevas formas de abordar el problema o resolver aquellos que aparecían en el proceso de respuesta a las preguntas planteadas más que como ejercicios de clase.

La necesidad de validar sus resultados —en particular en el caso de los problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales— hizo posible integrar la tecnología de una forma natural, equipos de cómputo y calculadoras científicas fueron aplicados para explorar distintas representaciones de los modelos obtenidos, para discutir la naturaleza de las posibles soluciones de las ecuaciones o para aproximar las soluciones a los datos concretos obtenidos de la fase experimental.

Una ventaja adicional del uso de la modelación en clase fue que puso de manifiesto los patrones de razonamiento seguidos por los estudiantes y sus dificultades conceptuales. Ello auxilió al maestro en cuanto a desarrollar actividades conceptuales a fin de satisfacer los requerimientos de los estudiantes, ya sea para introducir nuevos conceptos o reconsiderar errores que aparecían en la solución. Esto último fue muy evidente en el caso del modelo del péndulo.

El razonamiento de los estudiantes en esta experiencia evolucionó y las matemáticas se volvieron el centro de la discusión. Al final de cada uno de los proyectos descritos, las presentaciones exhibieron mayor solidez en el manejo de los conceptos y de sus relaciones. Si bien es imposible garantizar un aprendizaje significativo de todos los estudiantes, lo que sí se advirtió fue el cambio gradual en sus concepciones. El simple hecho de poner al descubierto algunas de sus ideas ya representó una ventaja, si a ello se suma la posibilidad de discusión, trabajo y reflexión, la prerrogativa de este tipo de trabajo se aprecia mucho mejor.

En todos los casos, de manera más o menos efectiva, los alumnos demostraron su capacidad para poner en juego y combinar los recursos conceptuales adquiridos. En general, se puede decir que el trabajo en los modelos proporcionó una excelente oportunidad para desarrollar eficazmente los conocimientos de los alumnos, además de ampliar su visión de lo que significan las matemáticas en la solución de problemas reales. Asimismo, la aplicación de la modelación en la solución ayudó a la mayor parte a sentirse más seguros de sus competencias y valorar de manera diferente la función de los cursos escolares, así como valorar las limitaciones de este tipo de modelación.

Los comentarios de los estudiantes que participaron en estas experiencias, después de uno o dos años, sobre el uso de los modelos fueron muy positivos. Expresaron gusto por el contenido de la materia y por el tipo de didáctica empleada; pero, lo más importante, es que aprendieron mucho mejor los conceptos en aquellas clases que los aprendidos en otras.

Reflexiones finales

Se ha visto a lo largo de este artículo que hay distintas formas de entender el uso de la modelación matemática en la enseñanza de las matemáticas y en la investigación en educación matemática. Las distintas perspectivas al respecto modulan los objetivos y la metodología de trabajo en el aula así como la forma de hacer investigación acerca de los resultados de su aplicación.

Entre las perspectivas mencionadas se encuentran algunas que tienen por objetivo enseñar los elementos de la modelación matemática; sin embargo, en otras ello no es central. La modelación no es una tarea fácil. Pensar como objetivo enseñar ambas cosas simultáneamente sería muy complicado. El tiempo que puede perderse en este tipo de técnicas —en un curso cuyo objetivo no es enseñar a modelar— puede empañar el propósito real de éste —que es la introducción de ciertos conocimientos matemáticos— y perder la atención de los estudiantes en los aspectos conceptuales importantes de la disciplina. En este tipo de proyectos parece ser esencial no perder de vista el objetivo central del curso y buscar el equilibrio entre aquellos aspectos de la modelación que son importantes de rescatar y los conceptos que se quieren enseñar. En cursos como aquellos de los que se tomaron los ejemplos presentados, este equilibrio permaneció siempre en la mira del profesor. Los modelos se usaron como instrumento para favorecer el desarrollo de esos conceptos, aunque las técnicas de modelación no resultaran las más adecuadas o las más eficaces en cada situación.

El momento de introducir las actividades conceptuales y su diseño son de suma importancia en el logro de un aprendizaje conceptual en este tipo de proyectos. En muchas ocasiones, es difícil encontrar la oportunidad en que estas actividades sean adecuadas y decidir qué tanto el trabajo sobre los conceptos matemáticos puede irrumpir de manera desfavorable en el proceso de modelación. La atención del maestro a este tipo de cuestiones resulta fundamental. Las experiencias que aquí se mostraron, y otras dentro de perspectivas similares, muestran que el diseño de las actividades debe favorecer el regreso al problema de modelación.

El diseño de las situaciones constituye un elemento central para que el uso de la modelación tenga éxito. Un problema planteado en buenos términos coadyuva el compromiso de los estudiantes en su solución y el aprendizaje de nuevos conceptos. Evidentemente, no todos los estudiantes avanzan de la misma manera, ni logran profundizar en los conceptos como sería deseable, pero puede decirse que los resultados obtenidos en este tipo de proyectos muestran con claridad las bondades de este acercamiento a la enseñanza de las matemáticas en la universidad.

Recibido noviembre 2008
Aceptado febrero 2009

Bibliografía

Barbosa, J. C., "Mathematical modelling in classroom: a sociocritical and discursive perspective", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38 (3), 2006, pp. 293-301.

Barbosa, J. C., "What is mathematical modelling?" en S. J. Lamon, W. A. Parder y K. Houston (eds.), *Mathematical modelling: a way of life*, Chichester, 2003, Ellis Horwood.

Bloedy-Vinner, H., "Beyond unknown and variables. Parameters and dummy variables in high school algebra" en Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. y Lins, R. (eds.), *Perspectives on school algebra*, Dordrecht, 2001, Kluwer Academic Publishers.

Borromeo Ferri, R., "Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 2006, pp. 86-95.

Camarena, G., P., *Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería*, reporte de investigación, México, 2000, ESIME-IPN.

Camarena, G., P., "Hacia la integración del conocimiento: matemáticas e ingeniería", *Memorias del 2º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México, 1999.

Chevallard, Y., M. Bosch, y J. Gascón, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, 1997, ICE/Horsori.

Donovan, J., "The importance of the concept of function for developing understanding of first-order differential equations in multiple representations", *Electronic proceedings for the tenth special interest group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 37(6), 2007, pp. 487-489.

Freudenthal, Hans, *Revisiting mathematics Education. China Lectures*", Dordrecht, 1991, Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H., "How to teach mathematics so as to be useful", *Educational Studies in Mathematics* 1 (1), 1968, pp. 3-8.

Furinghetti, F., y D. Paula, "Parameters, unknowns and variables: a little difference?", *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Lisbon, University of Lisbon, Portugal, 1994.

García, F. J., J. Gascón, L. Ruiz Higueras, y M. Bosch, "Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38, 2007, pp. 226-246.

Gravemeijer, K., y M. Doorman, "Context problems in realistic mathematics education. A calculus course as an example", *Educational Studies in Mathematics*, 39, 1999, pp. 111-129.

Gravemeijer, K., *Developing realistic mathematics education*, Utrecht, 1994, Cdß Press.

Haines, C., y R. Crouch, 2005,"Getting to grips with real world contexts: developing research in mathematical modeling", papers presented at *WG13 in the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Sant Feliu de Guíxols, http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/13/wg13listofpapers.htm

Israeli, G., *La mathématisation du réel. Essai sur la modelisation mathématique*, Paris, 1996, Editions du SEUIL.

Kaiser and Sriraman, 2006 Henning, H. y Keune, M., 2005, "Levels of modelling competence", papers presented at *WG13 in the 4th Congress of th European Society for Research in Mathematics Education*, Sant Feliu de Guíxols, 2006, http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/13/wg13listofpapers.htm

Lehrer, R., y L. Schauble, “The development of model-based reasoning”, *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21(1), 2000, pp. 39-48.

Lesh, R., y L. English, “Trends in the evolution of the Models and Modeling perspectives on mathematical learning and problem solving”, ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, 37(6), 2005, pp. 487-489.

Lesh, R. y B. Sriraman, “Mathematics education as design science”, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 37(6), 2005, pp. 490-505.

Lesh, R. y H. M. Doerr, “Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving”, en R. Lesh y H. Doerr (eds.) *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*, Mahawah, NJ, USA, 2003, Lawrence Erlbaum Associates.

Possani, E., M. Trigueros, G. Preciado, y M. D. Lozano, “Use of models in the teaching of linear algebra”, *Linear Algebra and Applications, 2009.* por publicarse.

Ramírez, C., A. Oktaç, C. García, “Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales”, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 19, 2005a, pp. 413-418.

Ramírez, C., A. Oktaç, C. García, “Las dificultades de los estudiantes en los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables”, *Actas del XVIII Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas*, Acapulco, Guerrero, 2005b.

Rasmussen, C. L., “New directions in differential equations: a framework for interpreting students understanding and difficulties”, *Journal of Mathematical B ehavior*, 20, 200, pp. 55-87.

Rasmussen, C. L., “Symbolizing and unitizing in differential equations”, paper presented at the *NCTM Research Pressession*, San Francisco, CA, 1999.

Streefland, L., “Search for the roots of ratio: some thoughts on the long term learning process”, *Educational Studies in Mathematics*, 16, 1985, pp. 75-94.

Trigueros, M., “Modeling in a dynamical systems course”, *Electronic proceedings for the tenth special interest group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2008, http://www.rume.org/crume2008/Trigueros_LONG.pdf

Trigueros, M., A. Oktaç, y L. Manzanero, “Understanding systems of equations in linear algebra”, papers presented at *WG13 in the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2007, Larnaca, Cyprus.

Trigueros, M., “Ideas acerca del movimiento del péndulo. Un estudio desde una perspectiva de modelación”, *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, vol. XI, núm. 31, octubre-diciembre, 2006, pp. 799-83.

Trigueros, M. y S. Ursini, “How do high school students interpret parameters in algebra?” en M. J. Høines y A. B. Fuglestad (eds.), proceedings of the *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, July 14-18, vol. 4, 2004, Bergen-Norway, Bergen University College, pp. 361-368.

Zbiek, R. M., y A. Conner, “Beyond motivation: exploring mathematical modeling as a context for deepening students’ understandings of curricular mathematics”, *Educational Studies in Mathematics*, 63(1), 2006, pp. 89-112.